طريقة الفروق المقسومة:

تعتمد هذه الطريقة على جداول فروق من نوع آخر تدعى جداول الفروق المقسومة
تستخدم هذه الطريقة في حالة تكون فيها المسافات بين نقاط الاستيفاء متساوية أو غير متساوية.

- لنوضح الآن جداول الفروق المقسومة

* جداول الفروق المقسومة:

لنفرض أن الدالة $y=f(x)$ تأخذ عند النقاط $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ القيم $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$

- إن الفروق المقسومة من المرتبة الأولى هي الفروق التالية:

- $Dy_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = (x_0, x_1) = (x_1, x_0)$

- $Dy_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (x_1, x_2)$

⋮

- $Dy_{n-1} = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = (x_{n-1}, x_n)$

وهي متناظرة بالنسبة لمتحولاتها.

- أما الفروق المقسومة من المرتبة الثانية فهي الفروق التالية:

- $D^2y_0 = \dfrac{(x_1, x_2) - (x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = (x_0, x_1, x_2)$

- $D^2y_1 = \dfrac{(x_2, x_3) - (x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = (x_1, x_2, x_3)$

⋮

- $D^2y_{n-2} = \dfrac{(x_{n-1}, x_n) - (x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} = (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$

- المقسومة من المرتبة الثالثة:

- $D^3y_0 = \dfrac{(x_1, x_2, x_3) - (x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

⋮

$$D^3 y_{n-3} = \frac{(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) - (x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-3}} = (x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

← والفروق من المرتبة n تكون حد واحد فقط.

• لنكتب الآن جدول للفروق المقسومة لعدد محدد من النقاط بالشكل التالي:

x_i	y_i	Dy_i	D^2y_i	D^3y_i	D^4y_i
x_0	y_0				
		(x_0, x_1)			
x_1	y_1		(x_0, x_1, x_2)		
		(x_1, x_2)		(x_0, x_1, x_2, x_3)	
x_2	y_2		(x_1, x_2, x_3)		$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
		(x_2, x_3)		(x_1, x_2, x_3, x_4)	
x_3	y_3		(x_2, x_3, x_4)		
		(x_3, x_4)			
x_4	y_4				

• لنكتب الآن المبرهنة التي تبين العلاقة التي تربط المشتقات بالفروق المقسومة.

مبرهنة:

لنفرض أن الدالة $y = f(x)$ قابلة للمفاضلة n مرة متتالية على المجال $[a, b]$ الذي يحوي نقاط الاستيفاء $x_i \; ; \; 1 \le i \le n$ عند ذلك توجد نقطة ضمن هذا المجال بحيث يكون:

$$D^n y_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} \quad ; \quad \alpha \in [a, b]$$

• تبديل هذه المشتقات في منشور تايلور بما يقابلها في الفروق المقسومة نحصل على كثير حدود الاستيفاء.

SUBJECT:

← فنجد : أن كثير الحدود الاستيفاء بطريقة الفروق المقسومة تكتب بالشكل :

$$P_n(x) = y_0 + (x-x_0)\,D y_0 + (x-x_0)(x-x_1)\,.D^2 y_0$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,D^3 y_0 + \dots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_{n-1})\,.D^n . y_0$$

• يحسب الخطأ المرتكب كما في الطريقة السابقة :

$$R(x) = \frac{w(x)}{(n+1)!} \cdot f^{n+1}(\alpha) \quad ; \quad \alpha \in [a,b]$$

وبالتالي :
$$R(x) \le \frac{w(x)}{(n+1)!} \cdot \max . f^{(n+1)}(\alpha) \quad , \quad \alpha \in [a,b]$$

• $R(x)=0$ عندما $f^{n+1}(\alpha)=0$

- ويكون $R(x)$ مساوي لقيمة العظمى عندما يكون $f^{(n+1)}(\alpha)$ ثابت .

• عندما تكون الدالة معطاة تحليلياً نشتق عدد كافي من المرات ونعوض في عبارة الخطأ المرتكب فنحصل على القيمة العظمى للخطأ المرتكب .

• إذا كانت الدالة مجهولة أو معطاة جدولياً نبدل المشتقة في عبارة الخطأ المرتكب عبارة له من الفروق المقسومة من المبرهنة السابقة وبالتالي بعد التبديل يصبح إيجاد الخطأ المرتكب في غاية البساطة .

مثال :

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	2	1	0	5

x_i	y_i	Dy_i	D^2y_i	D^3y_i	D^4y_i	D^5y_i
-2	-3					
		5				
-1	2		-3	1		
0	1	-1	0		0	
						(0)
1	0	-1	3	1	(0)	
		5	(6)	(1)		
2	5	(17)				
(3)	(22)					

يجب أن تكون درجة كثير حدود الاستيفاء من الدرجة الرابعة حسب نقاط الاستيفاء 5 ,

$0 = D^4 y_i \Leftarrow$ فهي من الدرجة الثالثة.

$$P_3(x) = y_0 + (x - x_0) D y_0 + (x - x_0)(x - x_1) D^2 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) D^3 y_0$$

$$= -3 + (x+2)5 + (x+2)(x+1)(-3) + (x+2)(x+1)(x)(1)$$

$$= -3 + 5x + 10 - 3x^2 - 9x - 6 + x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$P_3(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$R(x) \leq \frac{w(x)}{(n+1)!} \max f^{n+1}(\alpha) = \frac{w(x)}{5!} \max f^5(\alpha)$$

$$= \frac{w(x)}{5!} \max (5!) . D^5 y_i$$

$$R(x) \leq w(x) . D^5 y_i$$ نحصل على $D^5 y_i$ نضيف نقطة

$$R(x) = 0$$

الدالة هنا تطابق الحدود الاستيفاء

★ **طريقة لاغرانج:**

- تطبق هذه الطريقة عندما تكون المسافات بين نقاط الاستيفاء متساوية أو غير متساوية وتعتمد على مضاريب تدعى مضاريب لاغرانج ولا تعتمد على أي نوع من جداول الفروق.
- فإذا كانت لدينا الدالة $y = f(x)$ ولنفرض أن كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة n بالشكل التالي:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ____ + a_n . x^n$$

★ **التقريب الخطي "من الدرجة الأولى":**

لنقرب الدالة $y = f(x)$ من كثيرة حدود خطية من الشكل:

$$P_1(X) = a_0 + a_1 X$$

وفقاً للعلاقة الاستيفاء يكون:

$$P_1(x_i) = y_i$$

ومن المعلوم أن: $y = a_0 + a_1 X$ هي معادلة مستقيم يتعين في المستوي بنقطتين على الأقل هما: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$

وفقاً لعلاقة الاستيفاء:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 X = y_0 \\ a_0 + a_1 X_1 = y_1 \end{cases}$$

وهما عبارة عن معادلتين خطيتين بمجهولين a_1, a_0 بحلهما المشترك نجد a_1, a_0 على الشكل التالي:

$$a_0 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1} \quad , \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

بتبديل هاتين القيمتين:

$$P_1(X) = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x$$

$$P_1(X) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$P_1(X) = L_0(x) y_0 + L_1(x) . y_1$$

لنأخذ الآن كثير الحدود من الدرجة الثانية:

$$P_2(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

وهي معادلة قطع مكافئ ويتعين على الأقل بمعرفة ٣ نقاط $(x_0, y_0) / (x_1, y_1) / (x_2, y_2)$

وفقاً لعلاقة الاستيفاء:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0$$

$$a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_1^2 = y_1$$

$$a_0 + a_1 X_2 + a_2 X_2^2 = y_2$$

وهما عبارة عن جملة ٣ معادلات خطية بالمجاهيل a_0, a_1, a_2 وبالحل المشترك "بالطرائق المعروفة بالجبر الخطي" نحصل على a_0, a_1, a_2 و بالتبديل نحصل على كثيرة حدود الاستيفاء بعد ترتيب الحدود التي تحوي y_0, y_1, y_2.

$$P_2(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\cdot y_2$$

حيث:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad , \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

بنفس المبدأ يمكننا إيجاد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة والخامسة.

• كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة "n":

$$P_n(x) = L_0(x)\cdot y_0 + L_1(x)\cdot y_1 + \text{———} + L_n(x)\cdot y_n = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\cdot y_i$$

حيث:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\text{———}(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\text{———}(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\text{———}(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\text{———}(x_1-x_n)}$$

وهكذا حتى:

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\text{———}(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\text{———}(x_n-x_{n-1})}$$

ولحساب الخطأ المرتكب:

• إذا كانت الدالة المعطاة تحليلياً نشتق عدد كافٍ من المرات ونعوض في عبارة الخطأ المرتكب فنحصل على القيمة العظمى للخطأ المرتكب.

• أما إذا كانت الدالة معطاة جدولياً فلا يمكننا حسابه لأننا لا يمكننا تبديل الفروق "يؤجل إلى فصل حساب التقريبي للمشتقات —"

. عندما تكون الدالة معطاة جدولياً:
. نحسب المشتقة بطريقة تقريبية ثم نبدل تلك القيمة التقريبية للمشتقة فنحصل على
. الخطأ المرتكب.
. لنوجد كثيرة الحدود الاستيفاء بطريقة لاغرانج الموافقة للدالة.

x_i	x_0: -2	x_1: -1	x_2: 0	x_3: 1
y_i	-3 (y_0)	2 (y_1)	1 (y_2)	0 (y_3)

$$P_3(x) = L_0(x)\,y_0 + L_1(x).y_1 + L_2(x).y_2 + L_3(x).y_3$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x+1)(-x)(x-1)}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{2}(x+2)(x)(x-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-1)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{}$$

وبالتالي يكون:

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(x^3-x) + (x^3+x^2-2x) - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

$$= x^3 - 2x + 1$$

- إذا كان $f(x) = x^3-2x+1$ فإن: $f^{(n)}(x) = 0 \Leftarrow R = 0$
الدالة تطابق كثير الحدود.

. **طريقة المربعات الصغرى:**

. تعتمد على جعل مربعات الفرق ما بين الدالة وكثير الحدود أصغرياً وتطبق في الحالة

عندما تكون المسافات متساوية أو غير متساوية.
لنفرض أن $y = f(x)$ ولنحاول تقريبها من كثير حدود:

$$P_n(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \text{———} + a_n X^n$$

لنبدأ التقريب الخطي من المربعات الصغرى.

التقريب الخطي:

$$P_1(X) = a_0 + a_1 X$$

يجب أن يكون مربعات الفرق بين الدالة:

$$\min \sum_{i=0}^{n} [y_i - (P_1 X_i)]^2$$

$$= \min_{a_0 - a_n} \sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 X_i)]^2 \qquad E(a_0, a_1)$$

ومن المعروف إذا كانت لدينا دالة تابعة لـ n من المتحولات فإن هذه الدالة تبلغ قيمة حدية صغرى عندما جميع المشتقات الجزئية لتلك الدالة بالنسبة لجميع متحولاتها تساوي الصفر.

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 X_i)] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 X_i)] x_i = 0$$

بتوزيع المجموع على الحدود:

عدد نقاط الاستيفاء

- $(n+1) a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i$
- $a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i$

بالحل المشترك لهما نحصل على a_0 و a_1 وبالتبديل في $P(X)$ نحصل على تقريب المربعات الصغرى الخطي.

مثال: لنوجد كثيرة الحدود الاستيفاء للدالة المعطاة بالجدول.

x_i	-2	-1	0
y_i	-3	2	1

$$(n+1)a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i$$
$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i \cdot y_i$$

$$\Rightarrow \quad 3a_0 - 3a_1 = 0 \Rightarrow a_0 = a_1$$
$$-3a_0 + 5a_1 = 4$$
$$\Rightarrow a_0 - a_1 = 2$$